

Etude expérimentale du pendule simple,
double et inversé.

Lumay Geoffroy
Michel Fabrice

2002 - 2003

Table des matières

1	Introduction	3
2	Le pendule simple	4
2.1	But	4
2.2	Etude théorique	4
2.3	Montage expérimental	5
2.3.1	Introduction	5
2.3.2	Mesure des angles	5
2.3.3	Méthode d'enregistrement des angles	6
2.3.4	Description détaillée du montage électronique	6
2.3.5	Description du logiciel utilisé	9
2.4	Résultats expérimentaux	10
2.4.1	Calibration du dispositif	10
2.4.2	Première analyse du mouvement	12
2.4.3	Influence de la masse du pendule	13
2.4.4	Influence de la longueur du pendule	14
2.4.5	Détermination des frottements	15
3	Le pendule double	19
3.1	But	19
3.2	Etude théorique	19
3.2.1	Coordonnées généralisées	19
3.2.2	Vecteurs positions	20
3.2.3	Energies cinétiques	20
3.2.4	Energies potentielles gravigiques	20
3.2.5	Les frottements	21
3.2.6	Lagrangien du système	21
3.2.7	Equations de mouvement	21
3.3	Méthode de résolution numérique	22
3.3.1	Introduction	22

3.3.2	description du programme utilisé pour résoudre ces équations	23
3.4	Montage expérimental	24
3.5	Analyse des résultats	24
4	Le pendule inversé	29
4.1	Introduction	29
4.2	Description d'un pendule inversé	29
4.3	Intérêt de l'étude d'un pendule inversé	30
4.4	Dispositif expérimental	30
4.5	Principe de fonctionnement	33
4.6	Mode opératoire	33
4.7	Résultats	34
5	Sources	36
5.1	Bibliographie	36
5.1.1	Électronique	36
5.1.2	Programmation	36
5.1.3	Physique et mathématique	36
5.1.4	Pendule inversé	37
5.2	Sites Web	37
5.2.1	Mécanique générale	37
5.2.2	Le pendule double	37
5.2.3	robotique	37
6	Annexes	38
6.1	Annexe A : Amortissement exponentiel	38
6.2	Annexe B : Programme de résolution des équations du pendule double	40
6.2.1	Capture d'écran	40
6.2.2	Code source	40

Chapitre 1

Introduction

Nous avons tenu à faire un labo sur les pendules après avoir vu des petits films montrant des pendules inversés sur le web. Avant de se lancer dans la construction d'un pendule inversé, nous avons décidé de commencer par étudier le pendule simple et le pendule double. On parle beaucoup des pendules de manière théorique en candidature. Ce labo était l'occasion d'expérimenter ce que nous avons appris.

Avec ce laboratoire, nous avons eu l'occasion de faire de l'électronique, de la programmation, de l'analyse numérique, de la mécanique (celle où on se salit les mains) et aussi de la mécanique (celle des physiciens). C'est un programme relativement complet.

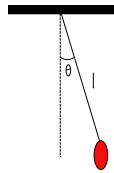
Nous avons eu l'occasion de présenter quelques expériences qui font partie de ce labo dans le cadre du 125^{ième} anniversaire de notre ancienne école. Un professeur de science avait emprunté la balançoire qui permet d'étudier les phénomènes de résonance à l'université. Et comme le sujet de nos expériences était le pendule, nous avons été sollicité.

Chapitre 2

Le pendule simple

2.1 But

Ce chapitre a pour but d'analyser le mouvement d'un pendule simple : $\theta(t)$. Nous tenterons de voir l'influence de la masse et de la longueur du pendule sur ce mouvement. Nous essayerons également de déterminer les frottements de notre système expérimental.



2.2 Etude théorique

Dans cette section, nous allons rappeler ¹ les caractéristiques du mouvement d'un pendule circulaire simple.

Si on néglige les frottements, une étude mécanique nous dit que pour des petites oscillations ², le pendule suit la loi :

$$\theta(t) = A.Cos(\omega t + \phi). \quad (2.1)$$

¹Il ne nous paraît pas nécessaire de rédiger tous les détails car cette théorie est reprise dans tous les manuels élémentaires de mécanique classique.

²C-à-d : $Sin(\theta) \approx \theta$ si θ est en radians.

Avec A : amplitude du mouvement oscillatoire ;

ϕ : phase du mouvement.

Et la pulsation $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$, L étant la longueur du pendule et g , l'accélération de la pesanteur.

On définit aussi la période du mouvement par : $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$.

Si maintenant, on introduit des frottements proportionnels à $\dot{\theta}$, on a un mouvement oscillatoire amorti :

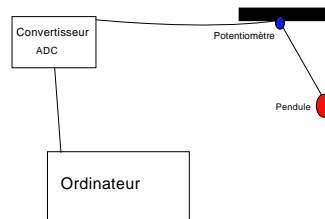
$$\theta(t) = A.exp(-\beta t).Cos(\omega t + \phi). \quad (2.2)$$

Où β est le coefficient de frottements.

2.3 Montage expérimental

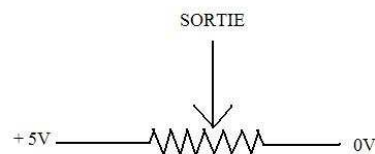
2.3.1 Introduction

Le montage est constitué d'un pendule simple dont la position angulaire θ est mesurée à l'aide d'un potentiomètre. Celui-ci étant relié à un "convertisseur analogique-digital maison" afin de pouvoir traiter les données directement sur ordinateur.



2.3.2 Mesure des angles

Les angles ont été mesuré a l'aide de potentiomètres montés de la manière suivante :



Un angle compris entre 0° et 350° donne lieu à une différence de potentiel comprise entre 0 et 5V.

2.3.3 Méthode d'enregistrement des angles

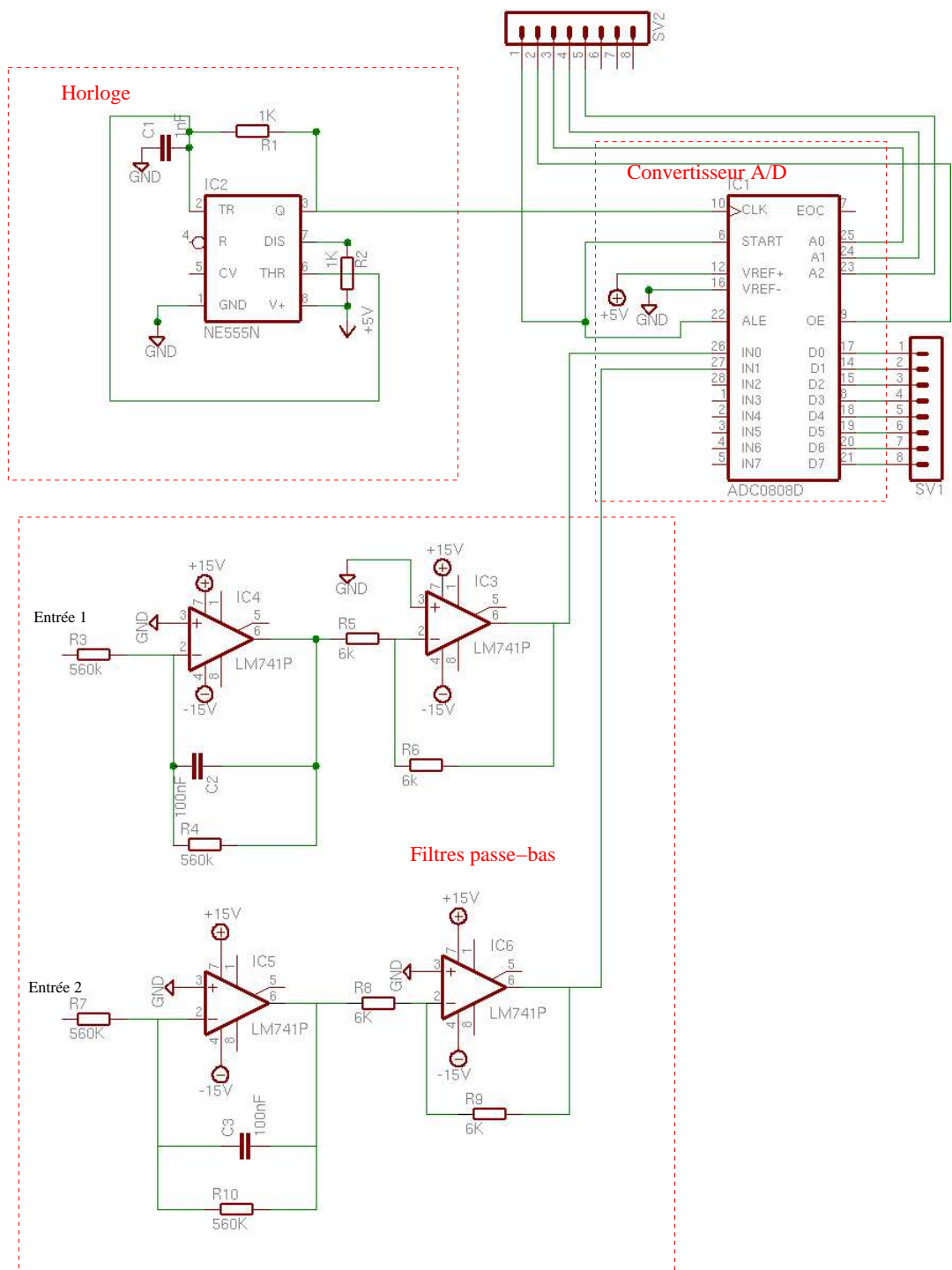
Nous avons essayé plusieurs méthodes. La première a consisté à connecter directement les potentiomètres au port joystick d'un ordinateur. Comme les joysticks sont constitués de potentiomètres, c'était la solution la plus évidente. Dans ce cas, la conversion analogique-numérique est basée sur la mesure du temps de déchargement d'un condensateur dans le potentiomètre. Le dispositif est très facile à réaliser mais les résultats n'étaient pas satisfaisant du point de vue de la précision et de la sensibilité aux parasites.

Nous avons donc construit un montage électronique adapté à nos besoins qui se branche sur le ports série d'un ordinateur. Les tensions comprises entre 0 et 5 Volts recueillent à la sortie des potentiomètres sont convertie en un nombre binaire de 8 bits par un convertisseur analogique-digital. Ce nombre binaire est "sérialisé" pour être transmi à l'ordinateur via le port série. Le bruit de fond est éliminé par des filtres passes bas dont la fréquence est de quelques Hertz. Nous avons choisi cette fréquence pour supprimer l'incontournable 50 Hz du secteur. Nos mesure ne seront pas affectée par ce filtre puisque le mouvement du pendule est relativement lent (quelques dixièmes de Hertz).

2.3.4 Description détaillée du montage électronique

Convertisseur Analogique-digital

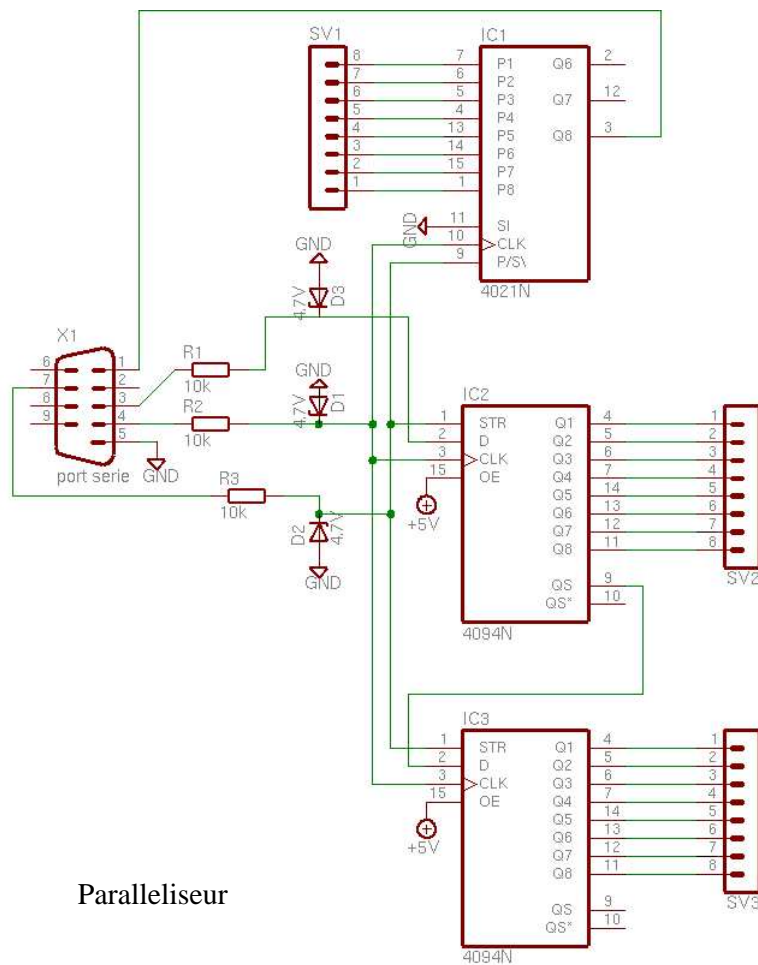
Voici le schéma du convertisseur :



Les signaux issus des potentiomètres sont appliqués aux entrées 1 et 2. Ils passent dans un filtre passe-bas constitué d'un amplificateur opérationnel

LM741. Comme le filtre inverse le signal, il est suivi d'un inverseur pour le redresser. Ensuite les signaux arrivent sur les entrées du convertisseur analogique digital constitué d'un circuit intégré ADC0808. Ce convertisseur est cadancé par une horloge basée sur un NE555 fournissant un signal carré de 480 KHz. Le résultat de la conversion se retrouve sur le connecteur SV1. Le connecteur SV2 contient les lignes de commandes du convertisseur : start, output enable, adresse des entrées.

Transmission des données vers l'ordinateur



Paralleliseur

Les connecteurs SV1 et SV2 du convertisseur A/D sont connectés aux connecteurs SV1 et SV2 de ce montage. Le travail de ce montage est de convertir les entrées et les sorties parallèles (le convertisseur A/D fonctionne en parallèle) en signaux série synchrone. Cette conversion est réalisée par des registres à décalage. Les résistances R1, R2, R3 et les diodes zener D1, D2, D3 ont pour rôle de convertir les signaux série en signaux TTL (5V).

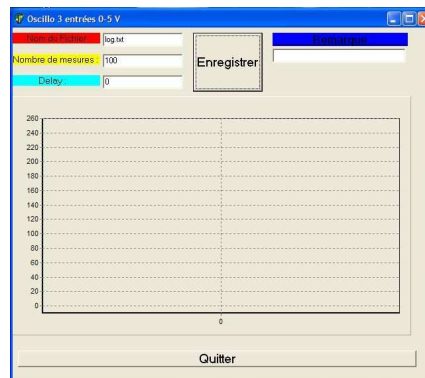
Résultat final

Voici une photo du montage :



2.3.5 Description du logiciel utilisé

Le programme qui gère la transmission des données avec le montage a été réalisé avec DELPHI. On introduit les paramètres de l'enregistrement (nombre de mesures, délais entre les mesures,...) et on lance la mesure en cliquant sur le bouton "enregistrer". Les résultats des mesures sont enregistrés dans un fichier texte et apparaît à l'écran sous forme d'un graphique.



En réalité, nous avons construit un oscilloscope adapté à nos besoins. Nous aurions pu utiliser un oscilloscope numérique. Dans ce cas, il aurait juste fallu construire les filtres et lire le mode d'emploi. Ça aurait été plus rapide mais sûrement moins enrichissant et moins amusant.

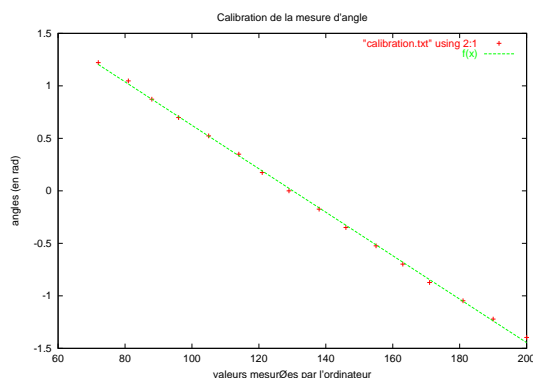
2.4 Résultats expérimentaux

2.4.1 Calibration du dispositif

Avant toute mesure, il est important de calibrer le dispositif.

Calibration angulaire

Nous devons convertir les tensions mesurées en angle θ . Pour ce faire, nous allons fixer le pendule à un angle précis et effectuer une mesure. La mesure fournit une tension proportionnelle à θ . En effectuant cette manipulation pour différentes valeurs de θ et en traçant un graphique de la tension en fonction de θ , on obtient la droite de calibration par fit :

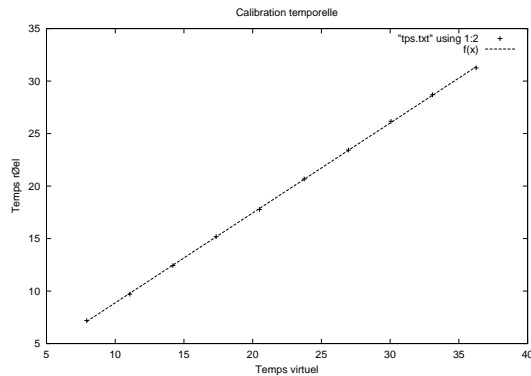


La relation obtenue est la suivante : angle $\theta = a * (\text{tension mesurée}) + b$.

	valeur	erreur (estimée par le logiciel de FIT)
a	-0.02070	$\pm 0.00014(0.6867\%)$
b	2.694	$\pm 0.019(0.7379\%)$

Calibration temporelle

L'ordinateur nous donne un temps (nous l'appellerons temps virtuel T_v) pour chaque mesure mais les unités sont un peu spéciales. Nous avons donc dû réaliser une calibration. Pour ce faire, nous avons demandé à l'ordinateur de réaliser un certain nombre de mesures. Et nous avons chronométré le temps (nous l'appellerons temps réel T_r) qu'il lui fallait pour faire l'enregistrement. Cette manipulation a été répétée pour des nombres de mesures différents. En traçant le graphique du temps réel, T_r , en fonction du temps virtuel, T_v , on obtient la courbe suivante :



Les résultats du fit pour $T_r = a.T_v + b$. sont :

	valeur	erreur (estimée par le logiciel de FIT)
a	0.8611	$\pm 0.0025(0.290\%)$
b	0.2377	$\pm 0.0593(24.916\%)$

Conséquence

Connaissant les équations des droites de calibration, nous allons pouvoir modifier nos données avant de les traiter et ainsi obtenir des conclusions sur la variable $\theta(t)$ et non plus sur la tension fournie par le système de mesure.

Programme de calibration

Le nombre de données à calibrer étant relativement important, ça aurait été trop fastidieux d'utiliser un tableur. Donc nous avons écrit un petit programme en JAVA qui effectue ces opérations facilement et rapidement. En plus c'était l'occasion de faire un exercice pour le cours de JAVA.

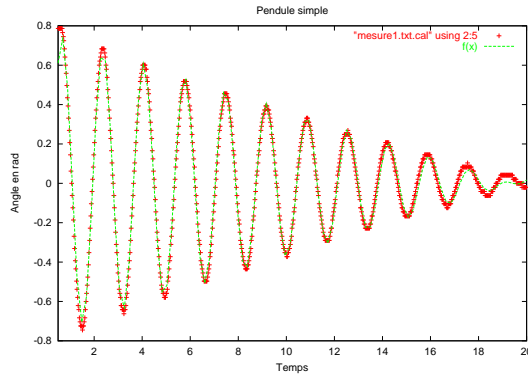


On introduit le nom du fichier qui contient les résultats à calibrer ainsi que les coefficients. On clique sur calibrer et les résultats calibrés sont inscrits dans un nouveau fichier mis en forme pour faciliter les traitements ultérieurs.

2.4.2 Première analyse du mouvement

Dans ce qui suit, nous allons simplement lancer le pendule et observer les résultats afin d'avoir une idée du mouvement.

Nous obtenons le graphique suivant :



Nous constatons que le mouvement du pendule simple correspond à une oscillation amortie. Cependant, le facteur d'amortissement ici ne correspond pas à une exponentielle négative³, comme prédit la théorie, mais plutôt à une droite⁴.

Le fit nous fournit la loi du mouvement suivante :

$$\theta(t) = a \cdot \frac{(b-t)}{b} \cdot \text{Cos}(ct - d). \quad (2.3)$$

	valeur	erreur (estimée par le logiciel de FIT)
a	0.768972	$\pm 0.002981(0.3876\%)$
b	19.4142	$\pm 0.07054(0.3633\%)$
c	3.69858	$\pm 0.0009426(0.0254\%)$
d	10.1003	$\pm 0.006082(0.0602\%)$

a représente donc l'amplitude ; b caractérise les frottements ; c est la pulsation et d, la phase.

On remarque que le fit diverge des données expérimentales aux grands temps. Cela pourrait s'expliquer par le fait que le pendule devient plus sensible aux perturbations extérieures et par le fait que le bruit est plus visible aux petites elongations.

³En annexe A, se trouve le fit pour un amortissement exponentiel.

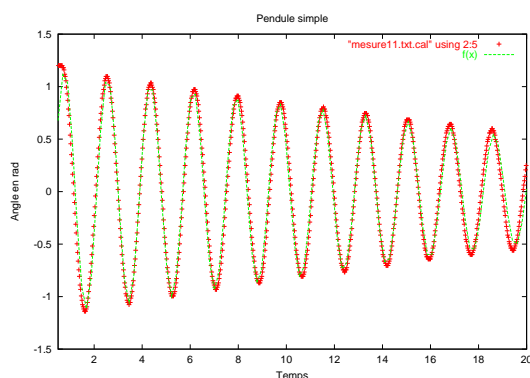
⁴Ceci sera étudié plus en détails dans la section 2.4.5 .

2.4.3 Influence de la masse du pendule

En théorie, la masse d'un pendule n'influence pas la période d'oscillation. Mais en pratique, qu'en est il ?

Pour voir l'effet de la masse, nous nous sommes munis de deux poids égaux.

Les résultats pour un pendule de masse équivalente à un seul poids sont ceux présentés au paragraphe 2.4.2. Quant aux résultats pour une masse équivalente à deux poids, ils sont répris ci-dessous :



Maintenant, le fit par la fonction :

$$\theta(t) = a \cdot \frac{(b-t)}{b} \cdot \text{Cos}(ct - d). \quad (2.4)$$

fournit les paramètres suivants :

	valeur	erreur (estimée par le logiciel de FIT)
a	1.17492	$\pm 0.01022(0.8699\%)$
b	34.779	$\pm 0.6559(1.886\%)$
c	3.51485	$\pm 0.00114(0.03243\%)$
d	9.86168	$\pm 0.01075(0.109\%)$

Or le paramètre qui nous intéresse dans cette section est le paramètre c , car c'est lui qui représente la pulsation dans le fit. Les paramètres a et d ne dépendent que des conditions initiales de l'expérience. Quant au paramètre b qui caractérise les frottements, il sera traité dans la section 2.4.5.

Nous constatons donc que si on double la masse du pendule, le paramètre c subit une diminution d'environ 4.97% de sa valeur. Nous pensons que cette

variation est très peu significative ⁵ compte tenu des erreurs éventuelles commises.

Nous en concluons donc que la pulsation du pendule est indépendante de la masse comme le prédit si bien la théorie.

2.4.4 Influence de la longueur du pendule

Au point de vue théorique, la longueur du pendule influence la pulsation selon la loi :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (2.5)$$

Où L est la longueur du pendule et g, l'accélération de la pesanteur.

Cependant, cette théorie suppose une masse ponctuelle et une tige de masse négligeable. Et dans ce cas, L représente la position de la masse ponctuelle.

Dans notre cas, la masse n'est pas ponctuelle et la tige est de masse non négligeable. Du coup, pour pouvoir se rapporter au cas théorique, il faut que le L représente la position du centre de masse du système tige-masse.

Notons : L_M , la position du centre de masse de la masse et L_t , la longueur de la tige ; M, la masse pendante et m, la masse de la tige.

Dans ces notations, la position L du centre de masse du système vaut :

$$L = \frac{ML_M + \frac{1}{2}mL_t}{M + m} \quad (2.6)$$

Or nous allons faire varier L_M pour voir l'influence de L sur la pulsation.

On constate donc que L est linéaire en L_M car L_t sera gardée constante.

Utilisons donc le fit suivant :

$$\omega = \sqrt{\frac{9,81}{eL + h}} \quad (2.7)$$

e nous renseigne sur le rapport $\frac{m}{M}$ ($e = 1 + \frac{m}{M}$) et h nous renseigne sur L_t quand e est connu ($h = \frac{1}{2}(1 + \frac{M}{m})L_t$).

⁵Idéalement, il aurait fallu réaliser l'expérience pour un plus grand nombre de poids suspendus et tracer ω en fonction du nombre de poids en esperant observer une constante. Malheureusement, nous n'avions que deux poids disponibles. Cependant, cette démarche pourra être réalisée pour la section 2.4.4.

Le fit fournit les résultats suivants :

	valeur	erreur (estimée par le logiciel de FIT)
e	0.892751	$\pm 0.008062(0.903\%)$
h	0.058302	$\pm 0.005296(9.084\%)$

On constate donc bien que la pulsation dépend de la longueur du pendule.

2.4.5 Détermination des frottements

Nous allons tenter dans ce paragraphe de déterminer les frottements dans notre système expérimental, mais aussi de voir l'influence de la masse et de la longueur du pendule sur ces frottements.

Frottements du système

Comme nous l'avons déjà dit, le mouvement du pendule obéit à la loi :

$$\theta(t) = a \cdot \frac{(b-t)}{b} \cdot \text{Cos}(ct - d). \quad (2.8)$$

Ceci implique que le facteur d'amortissement fr est du type linéaire en t :

$$fr(t) = \frac{b-t}{b} = 1 - \frac{t}{b}. \quad (2.9)$$

b caractérise les frottements. En effet, si b diminue alors le pendule subira un amortissement plus important.

Cependant, au point de vue théorique, les frottements devraient apporter un facteur d'amortissement de type exponentiel :

$$fr_{th}(t) = exp(-b't) \quad (2.10)$$

Avec b' coefficient de frottements : b' augmente implique que les frottements augmentent.

On peut relier la théorie et l'expérience grâce à un développement de Taylor au premier ordre de l'exponentiel :

En effet, $exp(-b't) = 1 - b't$ et dès lors, il suffit de poser que $b' = 1/b$ pour avoir accord entre théorie et expérience. Et du coup, $1/b$ représente donc le coefficient de frottements cité dans la section théorie 2.2.

On peut donc aussi dire que les frottements du système sont proportionnels à $\dot{\theta}$.

Influence de la masse sur les frottements

Une étude mécanique du pendule circulaire simple amorti dans laquelle la proportionnalité entre les frottements et $\dot{\theta}$ vaut r ($r > 0$) nous dit que le coefficient de frottements ($b'=1/b$) vaut r/m où m est la masse du pendule. Donc expérimentalement, notre paramètre b doit augmenter avec la masse m .

En nous basant sur les sections 2.4.2 et 2.4.3, nous obtenons :

	$m = \text{"1poids"}$	$m = \text{"2poids"}$
b	19.4142	34.779
b'	0.0515	0.0288

Nous remarquons qu'en doublant la masse m , b a subi une augmentation d'environ 26.507% de sa valeur.

Nous dirons donc que b est dépendant de la masse du pendule comme le prédit la théorie : si la masse augmente, les frottements diminuent (car b' diminue).

Ceci pouvait être conclu également en observant les graphiques des sections 2.4.2 et 2.4.3 : en effet dans la section 2.4.3, où m est plus importante, l'oscillation se stoppe moins tard par rapport à la section 2.4.2.

Influence de la longueur du pendule sur les frottements

Regardons maintenant la dépendance des frottements et de la longueur L du pendule.

Pour ce faire, faisons varier la longueur ⁶ du pendule et traçons le graphique du paramètre b' ($b' = 1/b$) en fonction de la longueur L .

Nous obtenons le graphique suivant :

Nous observons donc que les frottements dépendent de la longueur de la tige.

Ceci peut s'expliquer par le fait que plus la masse est proche du point d'attache du pendule et plus sa vitesse angulaire augmente. Or, les frottements sont proportionnels à $\dot{\theta}$, donc plus la longueur du pendule est faible, plus les frottements augmentent.

Le fit utilisé est la fonction⁷ : $b'(L) = p. (\frac{1}{L})^q$.

Il renvoie les valeurs suivantes :

	valeur	erreur (estimée par le logiciel de FIT)
p	0.024924	$\pm 0.0004274(1.715\%)$
q	1.09352	$\pm 0.03935(3.598\%)$

Le fit nous semble relativement bon aux petits longueurs mais il semble plus divergent aux grandes longueurs, ceci est probablement dû au fait que le pendule devient plus sensible aux perturbations extérieures aux grandes longueurs.

Ce fit nous permet aussi de déterminer la constante r qui correspond à la constante de proportionnalité entre les frottements et la vitesse $\dot{\theta}$.

⁶Pour ce faire, déplaçons la masse le long de la tige.

⁷Nous avons utilisé ce fit, car $\omega \approx \dot{\theta} = r.b'$ et $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$. Ce qui implique que $b' \approx \frac{\sqrt{g}}{r}.L^{-1/2}$.

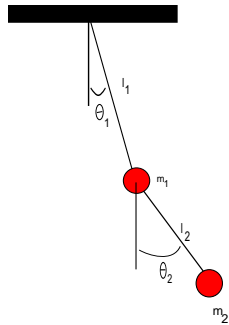
En effet, le paramètre p du fit vaut $\frac{\sqrt{g}}{r}$. Ce qui implique que r est de l'ordre de $125,666 \frac{kg}{s}$.

Chapitre 3

Le pendule double

3.1 But

Dans ce chapitre, nous allons étudier le mouvement d'un pendule double : $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.



3.2 Etude théorique

Etablissons maintenant les grandes lignes du développement théorique d'un pendule double amorti.

Pour ce faire, nous utiliserons les techniques de résolution lagrangienne.

3.2.1 Coordonnées généralisées

Le problème rencontre deux degrés de liberté ce qui impose l'existence de deux coordonnées généralisées q_i ; $i = 1, 2$.

Ces coordonnées généralisées sont :

$$\begin{cases} q_1 = \theta_1 \\ q_2 = \theta_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

Calculons de suite les dérivées temporelles de ces coordonnées q_i :

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \dot{\theta}_1 = \omega_1 \\ \dot{q}_2 = \dot{\theta}_2 = \omega_2 \end{cases} \quad (3.2)$$

3.2.2 Vecteurs positions

En prenant l'axe y, l'axe vertical (positif vers le haut) et l'axe x, l'axe horizontal (positif vers la droite), on calcul aisément les vecteurs positions \vec{r}_i des deux masses en fonction des coordonnées q_i à l'aide du schéma de la section 3.1.

On trouve :

$$\begin{cases} \vec{r}_1(t) = (l_1 \cdot \text{Sin}(\theta_1(t)), -l_1 \cdot \text{Cos}(\theta_1(t))) \\ \vec{r}_2(t) = (l_1 \cdot \text{Sin}(\theta_1(t)) + l_2 \cdot \text{Sin}(\theta_2(t)), -l_1 \cdot \text{Cos}(\theta_1(t)) - l_2 \cdot \text{Cos}(\theta_2(t))) \end{cases} \quad (3.3)$$

N.B : Dans la suite, afin d'alléger l'écriture, on écrira θ au lieu de $\theta(t)$.

3.2.3 Energies cinétiques

Connaissant l'expression des vecteurs positions en fonction des q_i , on peut déterminer l'expression des énergies cinétiques T_i des deux masses en fonction des mêmes coordonnées q_i .

On obtient :

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ T_2 = m_2 l_1 \dot{\theta}_1 l_2 \dot{\theta}_2 \text{Cos}(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \end{cases} \quad (3.4)$$

3.2.4 Energies potentielles gravifiques

Maintenant, exprimons les énergies potentielles gravifiques $V_{g,i}$ des deux masses à l'aide des q_i .

On trouve les expressions :

$$\begin{cases} V_{g,1} = -m_1 g l_1 \text{Cos}(\theta_1) \\ V_{g,2} = -m_2 g (l_1 \text{Cos}(\theta_1) + l_2 \text{Cos}(\theta_2)) \end{cases} \quad (3.5)$$

Où g est bien entendu l'accélération de la pesanteur.

3.2.5 Les frottements

Les frottements peuvent être introduits dans le formalisme lagrangien en introduisant un potentiel supplémentaire.

Dans le cas de frottements proportionnels à la vitesse, ce potentiel est le potentiel de Rayleigh.

Evidemment, les deux pendules subissent des frottements donc il s'agit d'introduire un potentiel de Rayleigh pour chaque pendule.

Les potentiels de Rayleigh $V_{R,i}$ s'écrivent :

$$\begin{cases} V_{R,1} = \frac{1}{2}\beta_1\dot{\theta}_1^2 \\ V_{R,2} = \frac{1}{2}\beta_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 \end{cases} \quad (3.6)$$

Où les β_i sont les coefficients de frottements des deux pendules.

3.2.6 Lagrangien du système

Vu tout ce qui a été calculé, il est facile de déterminer le lagrangien L du système :

$$L = T - V \quad (3.7)$$

A condition de prendre :

$$\begin{cases} T = T_1 + T_2 \\ V = V_{g,1} + V_{R,1} + V_{g,2} + V_{R,2} \end{cases} \quad (3.8)$$

3.2.7 Equations de mouvement

Afin de connaître les deux équations de mouvement $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$, il faut résoudre le système d'équation dit de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Ces équations sont connues car on a déterminé L par l'équation 3.7, q_i par les équations 3.1 et on connaît \dot{q}_i par les équations 3.2.

Donc au total, les équations à résoudre sont :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 = & - \frac{-m_1gl_1\text{Sin}(\theta_1) - m_2gl_1\text{Sin}(\theta_1) - m_2l_1l_2(\dot{\theta}_2)^2\text{Sin}(\theta_1 - \theta_2) + \beta_2\dot{\theta}_2 - \beta_2\dot{\theta}_1 - \beta_1\dot{\theta}_1}{l_1^2(-m_2 - m_1 + m_2\text{Cos}(\theta_1 - \theta_2)^2)} \\ & + \frac{\text{Cos}(\theta_1 - \theta_2)(-\beta_2\dot{\theta}_2 + m_2l_1(\dot{\theta}_1)^2l_2\text{Sin}(\theta_1 - \theta_2) - m_2gl_2\text{Sin}(\theta_2) + \beta_2\dot{\theta}_1)}{l_1l_2(-m_2 - m_1 + m_2\text{Cos}(\theta_1 - \theta_2)^2)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\text{Cos}(\theta_1 - \theta_2)(-m_1 g l_1 \text{Sin}(\theta_1) - m_2 g l_1 \text{Sin}(\theta_1) - m_2 l_1 l_2 (\dot{\theta}_2)^2 \text{Sin}(\theta_1 - \theta_2) + \beta_2 \dot{\theta}_2 - \beta_2 \dot{\theta}_1 - \beta_1 \dot{\theta}_1)}{l_1 l_2 (-m_2 - m_1 + m_2 \text{Cos}(\theta_1 - \theta_2))^2} - \frac{(m_2 + m_1)(-\beta_2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 (\dot{\theta}_1)^2 l_2 \text{Sin}(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \text{Sin}(\theta_2) + \beta_2 \dot{\theta}_1)}{l_2^2 (-m_2 - m_1 + m_2 \text{Cos}(\theta_1 - \theta_2))^2} \quad (3.11)$$

Ces deux équations différentielles couplées ne sont pas solubles analytiquement. Nous devons donc utiliser une méthode numérique pour connaître les solutions pour chaque conditions initiales.

3.3 Méthode de résolution numérique

3.3.1 Introduction

Pour résoudre ces équations numériquement, nous avons utilisé la méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre à deux variables.

Méthode de Runge-Kutta

Posons :

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1 \quad (3.12)$$

$$\omega_2 = \dot{\theta}_2 \quad (3.13)$$

Les équations deviennent :

$$\dot{\omega}_1 = f_1(t, \omega_1, \omega_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{-m_1 g l_1 \text{Sin}(\theta_1) - m_2 g l_1 \text{Sin}(\theta_1) - m_2 l_1 l_2 (\omega_2)^2 \text{Sin}(\theta_1 - \theta_2) + \beta_2 \omega_2 - \beta_2 \omega_1 - \beta_1 \omega_1}{l_1^2 (-m_2 - m_1 + m_2 \text{Cos}(\theta_1 - \theta_2))^2} + \frac{\text{Cos}(\theta_1 - \theta_2)(-\beta_2 \omega_2 + m_2 l_1 (\omega_1)^2 l_2 \text{Sin}(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \text{Sin}(\theta_2) + \beta_2 \omega_1)}{l_1 l_2 (-m_2 - m_1 + m_2 \text{Cos}(\theta_1 - \theta_2))^2} \quad (3.14)$$

$$\dot{\omega}_2 = f_2(t, \omega_1, \omega_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{\text{Cos}(\theta_1 - \theta_2)(-m_1 g l_1 \text{Sin}(\theta_1) - m_2 g l_1 \text{Sin}(\theta_1) - m_2 l_1 l_2 (\omega_2)^2 \text{Sin}(\theta_1 - \theta_2) + \beta_2 \omega_2 - \beta_2 \omega_1 - \beta_1 \omega_1)}{l_1 l_2 (-m_2 - m_1 + m_2 \text{Cos}(\theta_1 - \theta_2))^2} - \frac{(m_2 + m_1)(-\beta_2 \omega_2 + m_2 l_1 (\omega_1)^2 l_2 \text{Sin}(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \text{Sin}(\theta_2) + \beta_2 \omega_1)}{l_2^2 (-m_2 - m_1 + m_2 \text{Cos}(\theta_1 - \theta_2))^2}$$

L'algorithme de Runge-Kutta s'écrit de la manière suivante :

$$\omega_1(n+1) = \omega_1(n) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3.15)$$

$$\omega_2(n+1) = \omega_2(n) + \frac{h}{6}(j_1 + 2j_2 + 2j_3 + j_4) \quad (3.16)$$

$$\theta_1(n+1) = h\omega_1(n) + \theta_1(n) \quad (3.17)$$

$$\theta_2(n+1) = h\omega_2(n) + \theta_2(n) \quad (3.18)$$

avec :

$$k_1 = f_1(t(n), \omega_1(n), \omega_2(n), \theta_1(n), \theta_2(n)) \quad (3.19)$$

$$j_1 = f_2(t(n), \omega_1(n), \omega_2(n), \theta_1(n), \theta_2(n)) \quad (3.20)$$

$$k_2 = f_1\left(t(n) + \frac{h}{2}, \omega_1(n) + \frac{h}{2}k_1, \omega_2(n) + \frac{h}{2}j_1, \theta_1(n), \theta_2(n)\right) \quad (3.21)$$

$$j_2 = f_2\left(t(n) + \frac{h}{2}, \omega_1(n) + \frac{h}{2}k_1, \omega_2(n) + \frac{h}{2}j_1, \theta_1(n), \theta_2(n)\right) \quad (3.22)$$

$$k_3 = f_1\left(t(n) + \frac{h}{2}, \omega_1(n) + \frac{h}{2}k_2, \omega_2(n) + \frac{h}{2}j_2, \theta_1(n), \theta_2(n)\right) \quad (3.23)$$

$$j_3 = f_2\left(t(n) + \frac{h}{2}, \omega_1(n) + \frac{h}{2}k_2, \omega_2(n) + \frac{h}{2}j_2, \theta_1(n), \theta_2(n)\right) \quad (3.24)$$

$$k_4 = f_1(t(n) + h, \omega_1(n) + hk_3, \omega_2(n) + hj_3, \theta_1(n), \theta_2(n)) \quad (3.25)$$

$$j_4 = f_2(t(n) + h, \omega_1(n) + hk_3, \omega_2(n) + hj_3, \theta_1(n), \theta_2(n)) \quad (3.26)$$

(3.27)

h est le pas temporel.

3.3.2 description du programme utilisé pour résoudre ces équations

Nous avons écrit un programme qui utilise la méthode de Runge-Kutta pour résoudre les équations. Ce programme a été réalisé en java. Il est entièrement graphique. Donc on peut ajuster facilement les paramètres avec la souris et visualiser les résultats sous forme de graphiques.

Le code source et des captures d'écrans sont présenté en annexe B.

3.4 Montage expérimental

Les positions angulaires θ_1 et θ_2 des deux pendules sont mesurées à l'aide de deux potentiomètres. Ces derniers sont reliés à un convertisseur ADC pour pouvoir traiter directement les données sur ordinateur.



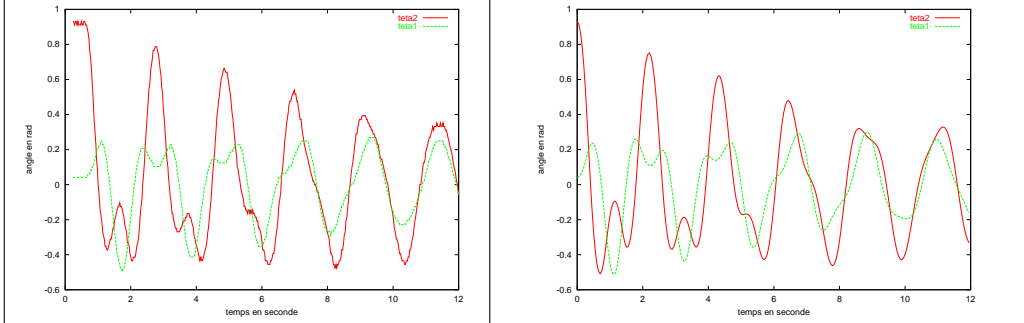
Le système d'acquisition est le même que celui utilisé pour l'étude du pendule simple.

3.5 Analyse des résultats

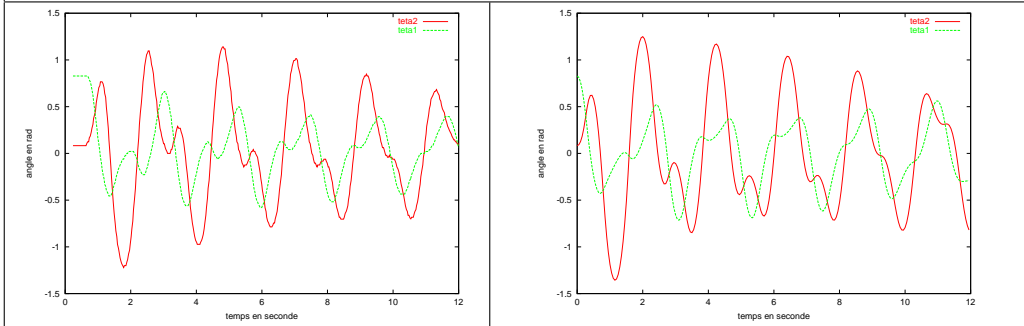
Voici un tableau qui montre les résultats qu'on obtient pour plusieurs type de conditions initiales. Les conditions initiales sont inscrites au dessus de chaque paire de graphiques. Les graphiques de gauche correspondent aux résultats expérimentaux et les graphiques de droite aux résultats provenant de la résolution numérique des équations théoriques.

Les longueurs, les angles de départ et les masses sont connues. Par contre, les frottements doivent être ajustés par essais erreurs. En général, les résultats théoriques sont proches des résultats numériques.

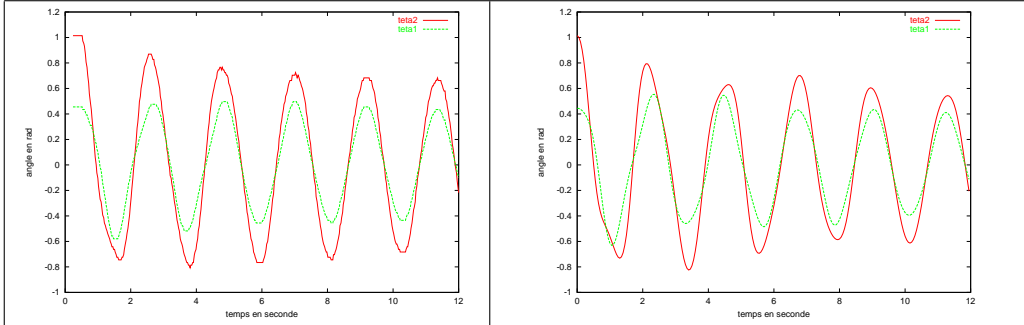
$$l_1 = 73.5\text{cm}, l_2 = 73.5\text{cm}, p_1 = 320\text{g}, p_2 = 320\text{g}, \theta_1^0 = 0.041, \theta_2^0 = 0.931$$



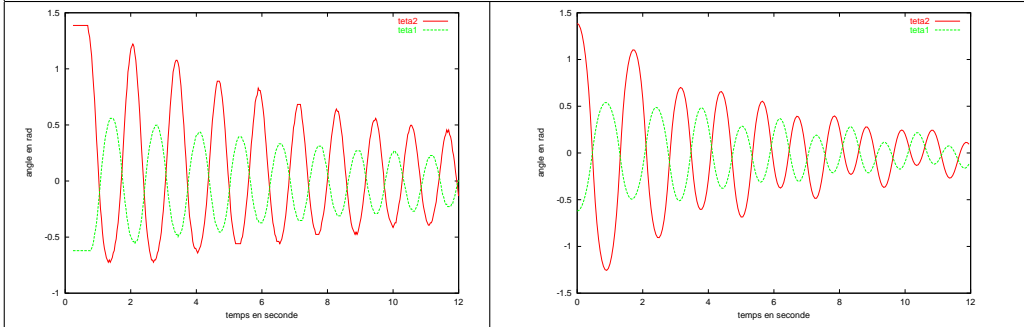
$$l_1 = 73.5\text{cm}, l_2 = 73.5\text{cm}, Np_1 = 320\text{g}, p_2 = 320\text{g}, \theta_1^0 = 0.828, \theta_2^0 = 0.083$$



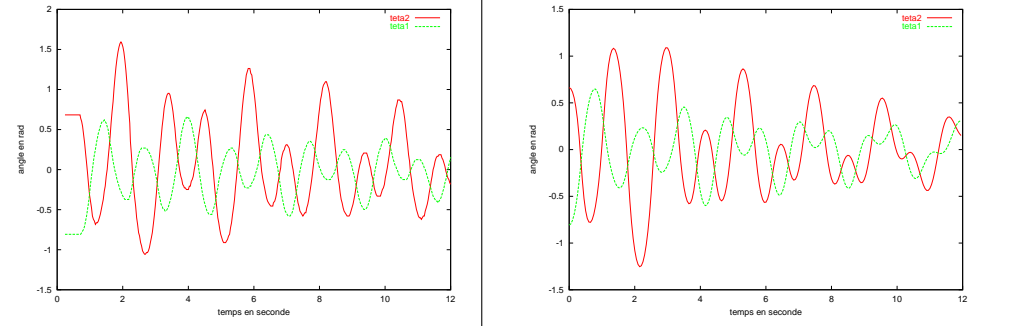
$$l_1 = 73.5\text{cm}, l_2 = 73.5\text{cm}, Np_1 = 320\text{g}, p_2 = 320\text{g}, \theta_1^0 = 0.455, \theta_2^0 = 1.014$$



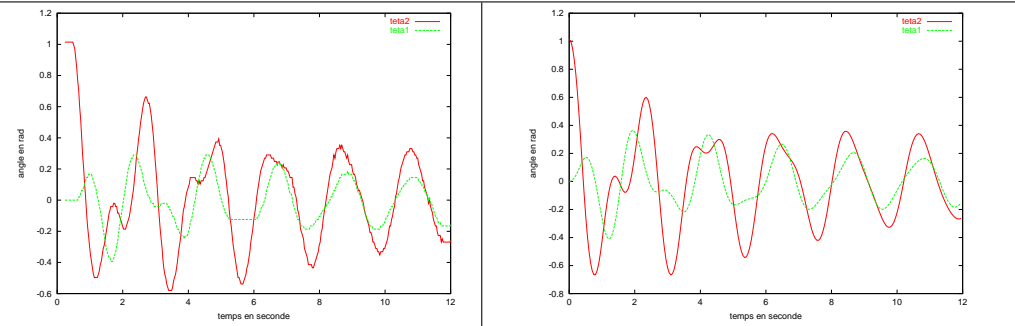
$$l_1 = 73.5\text{cm}, l_2 = 73.5\text{cm}, Np_1 = 320\text{g}, p_2 = 320\text{g}, \theta_1^0 = -0.621, \theta_2^0 = 1.386$$



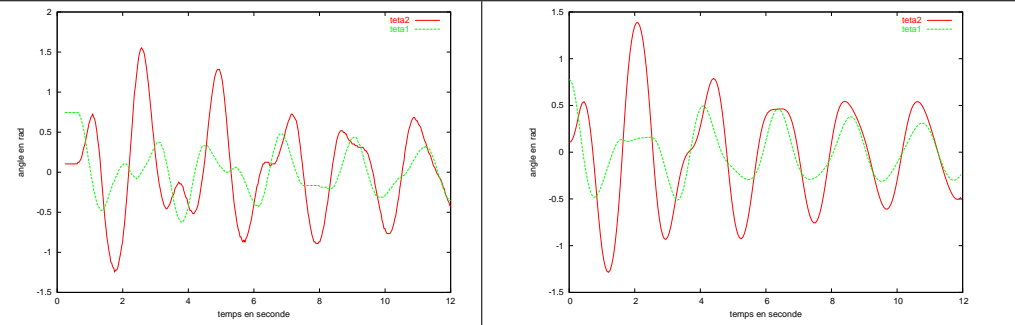
$$l_1 = 73.5\text{cm}, l_2 = 73.5\text{cm}, Np_1 = 320g, p_2 = 320g, \theta_1^0 = -0.807, \theta_2^0 = 0.683$$



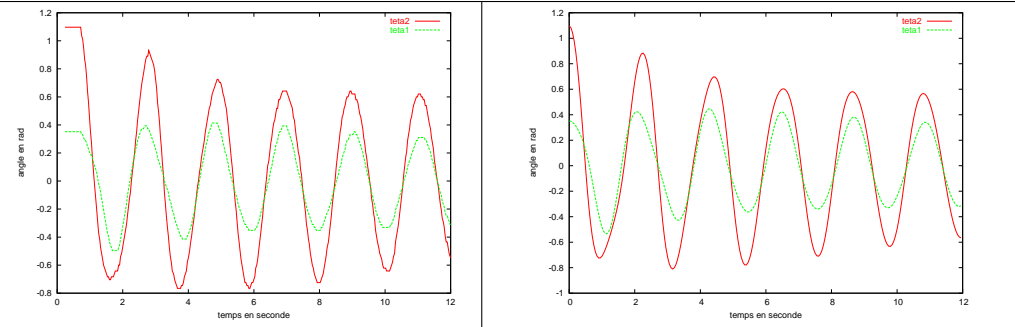
$$l_1 = 73.5\text{cm}, l_2 = 73.5\text{cm}, Np_1 = 320g, p_2 = 160g, \theta_1^0 = 0, \theta_2^0 = 1.014$$



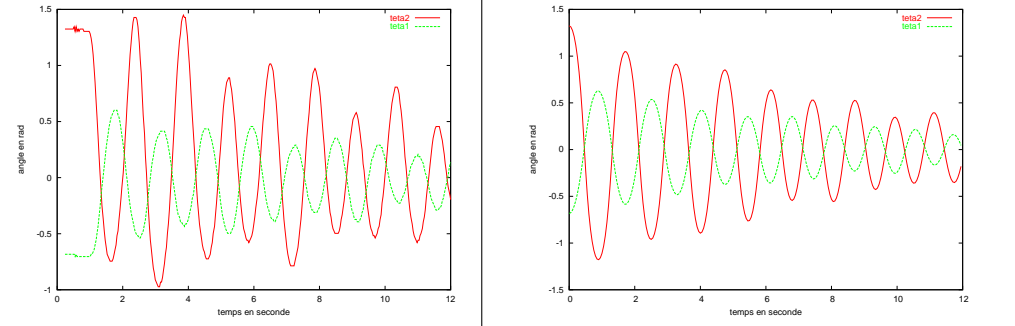
$$l_1 = 73.5\text{cm}, l_2 = 73.5\text{cm}, Np_1 = 320g, p_2 = 160g, \theta_1^0 = 0.745, \theta_2^0 = 0.103$$



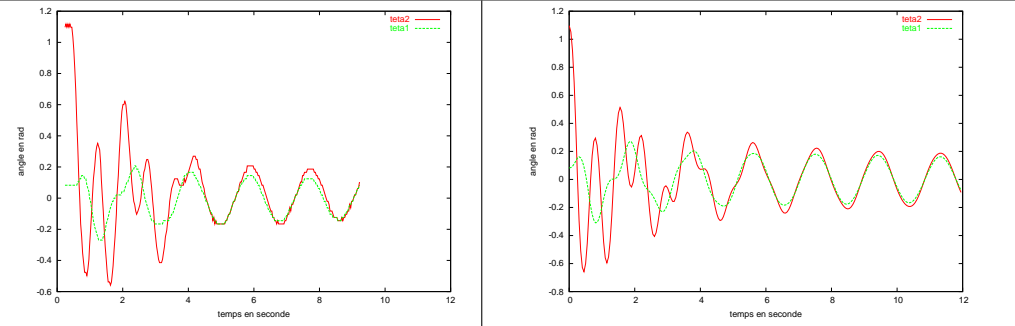
$$l_1 = 73.5\text{cm}, l_2 = 73.5\text{cm}, Np_1 = 320g, p_2 = 160g, \theta_1^0 = 0.351, \theta_2^0 = 1.097$$



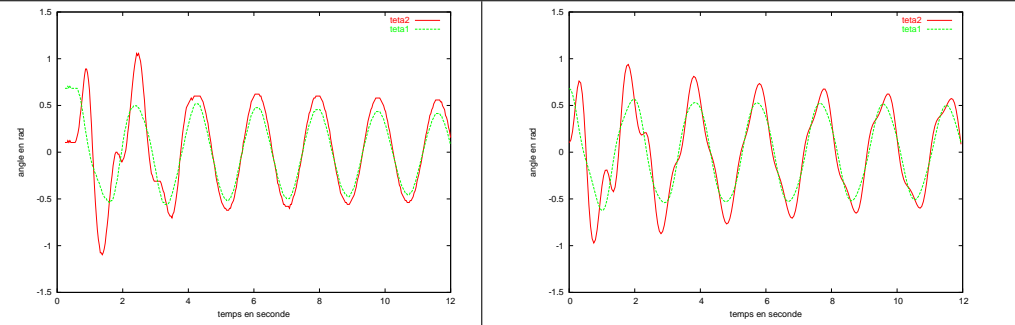
$$l_1 = 73.5\text{cm}, l_2 = 73.5\text{cm}, Np_1 = 320g, p_2 = 160g, \theta_1^0 = -0.683, \theta_2^0 = 1.325$$



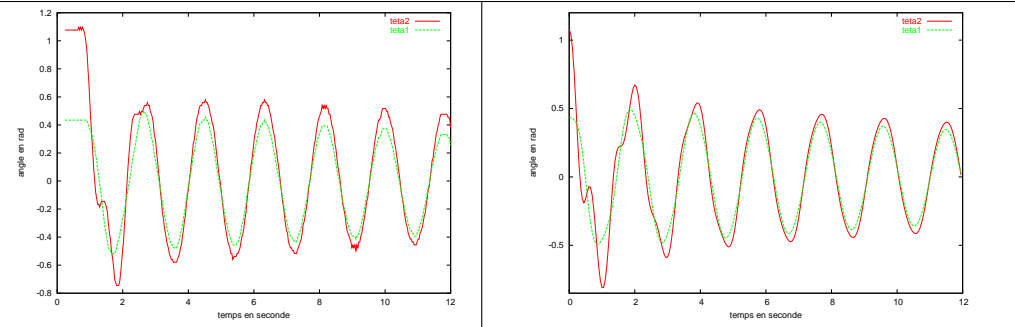
$$l_1 = 73.5\text{cm}, l_2 = 27\text{cm}, Np_1 = 320g, p_2 = 320g, \theta_1^0 = 0.082, \theta_2^0 = 1.097$$

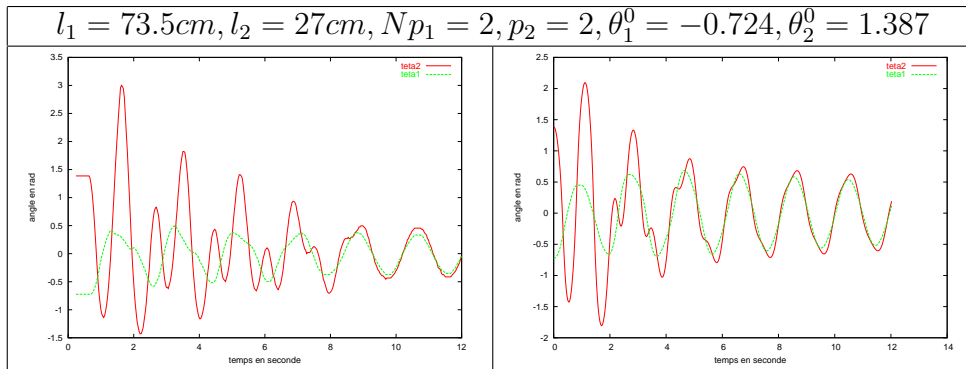


$$l_1 = 73.5\text{cm}, l_2 = 27\text{cm}, Np_1 = 320g, p_2 = 320g, \theta_1^0 = 0.683, \theta_2^0 = 0.103$$



$$l_1 = 73.5\text{cm}, l_2 = 27\text{cm}, Np_1 = 320g, p_2 = 320g, \theta_1^0 = 0.434, \theta_2^0 = 1.076$$





Pour la dernière mesure, les résultats ne ressemblent pas très fort aux courbes calculées parce que les variations sont trop rapides. Par conséquent, la méthode numérique a tendance à diverger quand les frottements ne sont pas très importants. Il a donc fallu augmenter les frottement. L'autre solution consiste à diminuer le pas temporel. Nous avons essayé de le faire mais les calculs devenaient très longs et les résultats ne semblaient pas vouloir s'améliorer.

Insistons sur le fait que le mouvement du pendule double dépend très fort des conditions initiales. Si on modifie légèrement les conditions initiales, le mouvement du pendule change très fort. Ceci a entraîné des difficultés lors des calculs numériques. Il a parfois fallu modifier légèrement (c'est à dire dans la fourchette des erreurs commises lors des mesures) les valeurs des paramètres pour obtenir la courbe attendue.

Chapitre 4

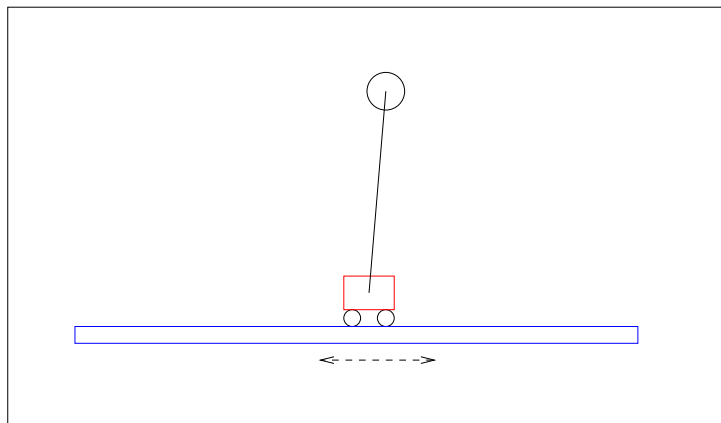
Le pendule inversé

4.1 Introduction

C'est l'envie d'arriver à construire un pendule inversé qui a été notre principale motivation lors de l'accomplissement de ce labo. Les manipulations précédentes nous ont permis de développer des systèmes de mesures d'angles assistés par ordinateur. Nous allons maintenant essayer de réaliser un dispositif plus complexe. Nous ne savions pas du tout si cela allait fonctionner. On est arrivé à quelques résultats mais c'est loin d'être parfait.

4.2 Description d'un pendule inversé

Un pendule inversé est un pendule simple monté sur un chariot. Le mouvement du chariot doit maintenir le pendule dans sa position d'équilibre instable (masse dirigée vers le haut). Voici un schéma du dispositif :



4.3 Intéret de l'étude d'un pendule inversé

L'étude du pendule inverse a assez bien d'importance. Il y a plusieurs raisons à cela :

- L'homme est un pendule double inversé dont les deux axes de rotation principaux sont les chevilles et les hanches. Quand nous sommes en position debout, nos articulations travaillent sans arrêt pour nous y maintenir. Les spécialistes qui travaillent à la réalisation de prothèses pour les hanches sont amenés à utiliser le modèle du pendule double inversé pour calculer l'ensemble des contraintes qui sont soumises à la protèse.
- Dans le même ordre d'idée, la robotique utilise ce genre de concept.
- On voit apparaître des moyens de locomotion dotés de deux roues montées sur un même axe sur lequel on est en position debout. On accélère en se penchant en avant et on ralenti en se penchant en arrière. Le système est le même que le pendule inversé. La stabilité est aussi assurée par des gyroscopes mais nous n'entrerons pas dans ce genre de détails.
- Les étudiants en automatique, robotique ... font des labos avec ce genre de dispositif. Parce qu'ils font intervenir beaucoup de notions intéressantes pour eux : programmation, automatisation, mécanique...

4.4 Dispositif expérimental

La première chose à faire était de trouver un mécanisme mobile sur lequel on pouvait monter un pendule simple avec son système de mesure d'angle (toujours un potentiomètre). De plus, le mouvement devait être relativement rapide. En fait, ce genre de mécanisme est très fréquent. On en trouve dans toutes les imprimantes à jet d'encre ou dans toutes les machines à écrire électriques. Nous sommes donc allés faire une petite visite à la casse en quête de ce type de dispositif.

Après avoir ajouté des barres métalliques (en orange) empêchant le pendule de tomber de trop haut en cas de problème. Ainsi que des petits interrupteurs de fin de course, voici le résultat :

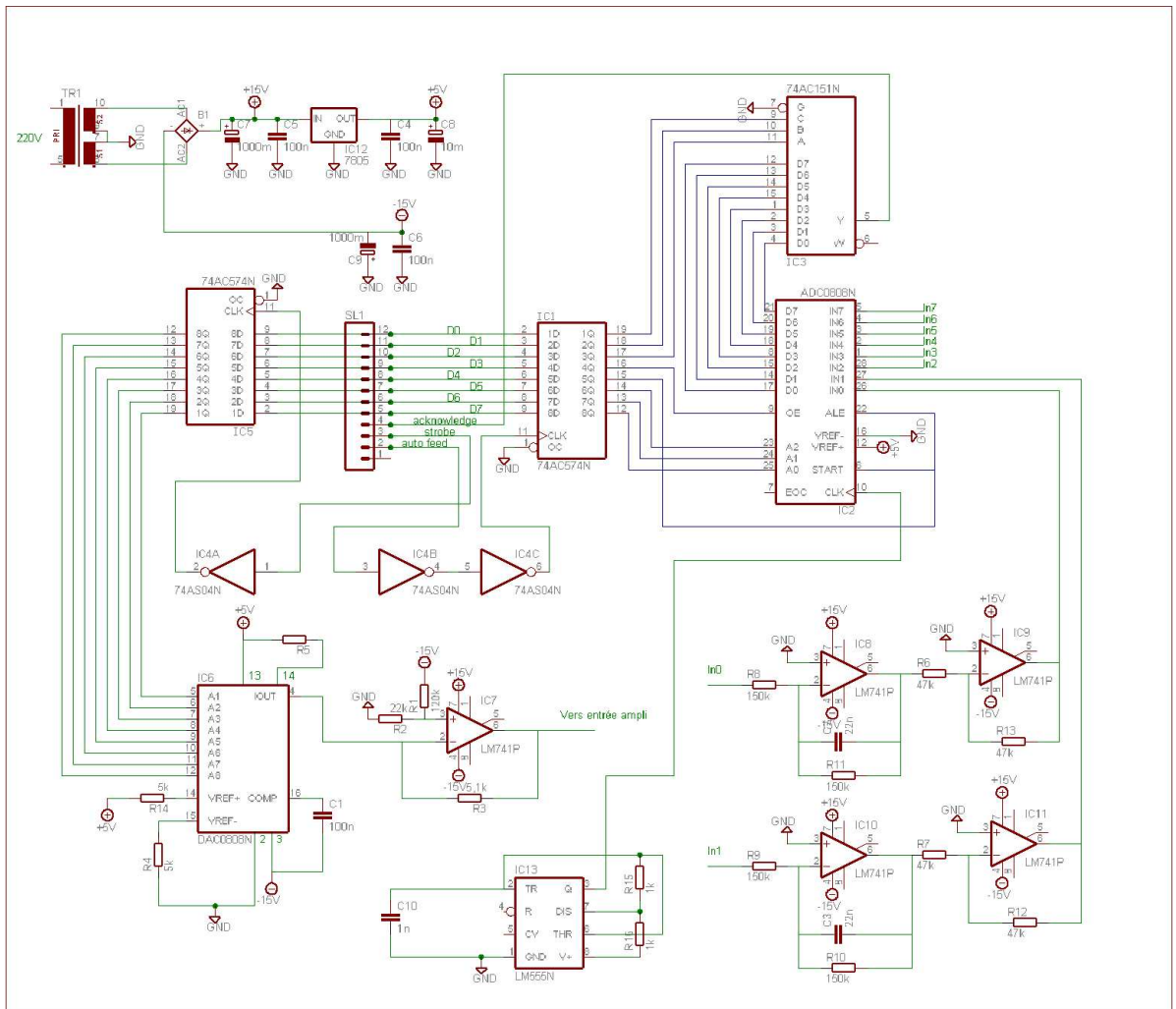
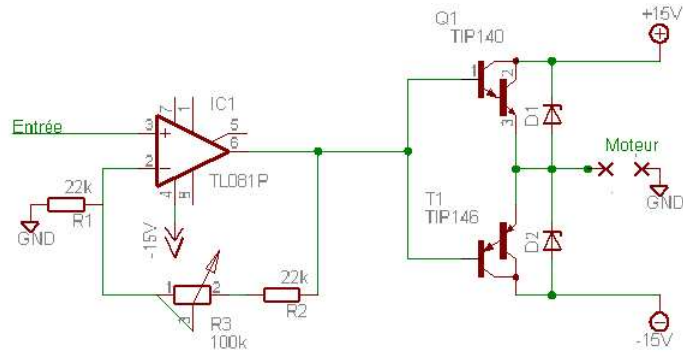


Ensuite, nous avons ajouté quelques éléments au montage électronique présenté au second chapitre pour qu'il puisse commander le moteur du chariot. Les éléments en question sont un convertisseur digital-analogique et un amplificateur de puissance (le moteur consomme beaucoup surtout quand il doit changer de sens de rotation plusieurs fois par seconde!). Idéalement, il faudrait utiliser un système de découpage plutôt qu'un système de modulation pour l'alimentation du moteur. C'est une amélioration à envisager.

Voici une photo du montage amélioré et de l'ampli de puissance ainsi que les schémas :



Amplificateur de puissance:

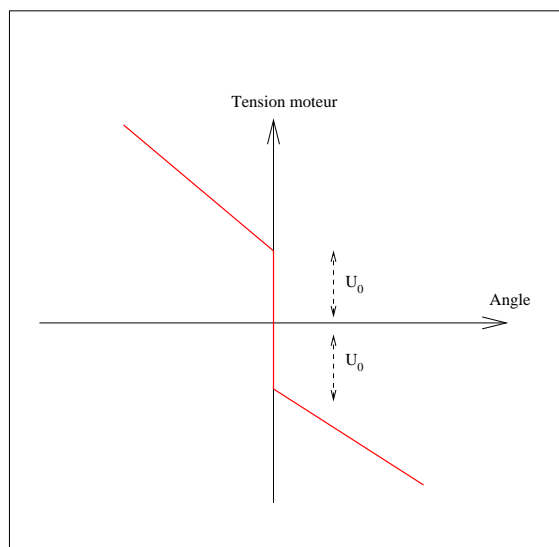


Les détails sur ce montage électronique et sur le programme qui le gère seront donnés dans le travail pour le cours de JAVA.

4.5 Principe de fonctionnement

Le principe du système est très simple en théorie : quand le pendule penche vers la droite, le chariot doit le rattraper en effectuant un mouvement vers la droite. Et inversement.

La difficulté c'est de régler l'intensité et la forme de la réaction du chariot en fonction de l'angle que le pendule fait avec la verticale. Voici la forme la plus simple :



U_0 est la tension qu'il faut appliquer aux bornes du moteur pour vaincre les frottements. On peut essayer d'autres types de courbe. Par exemple, les droites peuvent être remplacées par des paraboles. Ainsi, la réaction est plus importante quand le pendule s'écarte fort de la verticale. Nous nous sommes limités à la forme représentée sur le graphique.

4.6 Mode opératoire

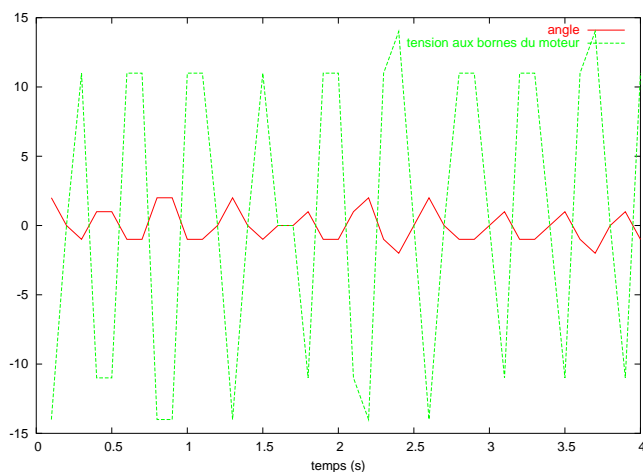
On lache le pendule dans la position verticale haute et on laisse le système évoluer. Les réglages s'effectuent par essais erreurs. Le réglage de U_0 est relativement simple. Par contre le réglage de la pente des droites est plus délicat.

On aurait aimé pouvoir lacher le pendule dans la position verticale basse et programmer le mouvement du chariot pour amener le pendule en position verticale haute et l'y maintenir. Malheureusement, le temps dont on dispose ne nous le permet pas.

4.7 Résultats

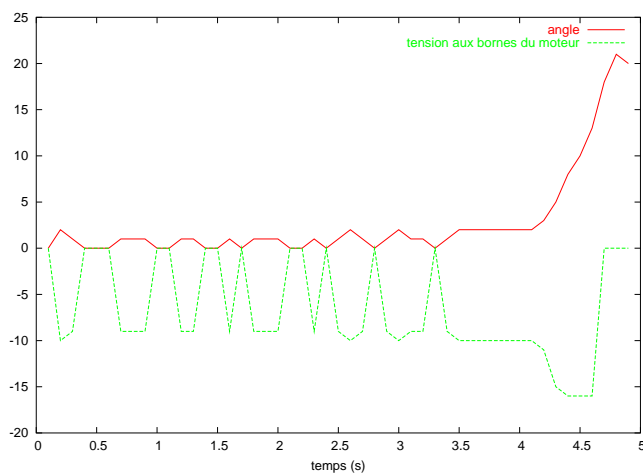
Voici quelques graphiques qui montrent comment la tension du moteur a évolué en fonction de l'angle. Les unités pour l'angle sont arbitraires (0 correspond à l'équilibre instable).

Avec un réglage "grossier" voici ce qu'on obtient :

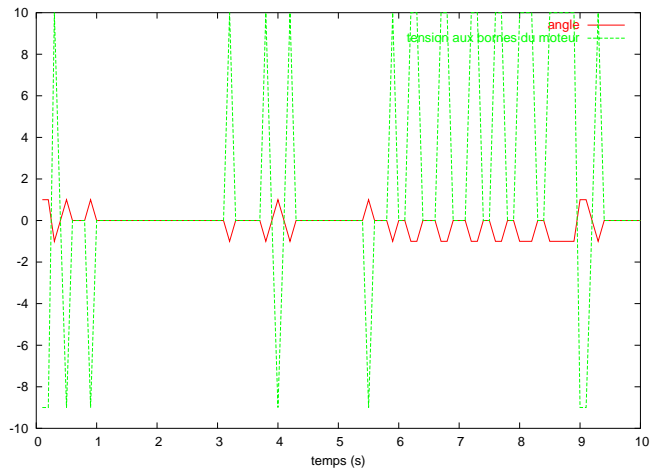


Le pendule et le chariot oscillent fortement en permanence. On observe cela quand le chariot a tendance à réagir trop intensément.

Si le chariot réagit trop faiblement, il n'arrive pas à rattraper le pendule et il finit par tomber d'un côté ou de l'autre :

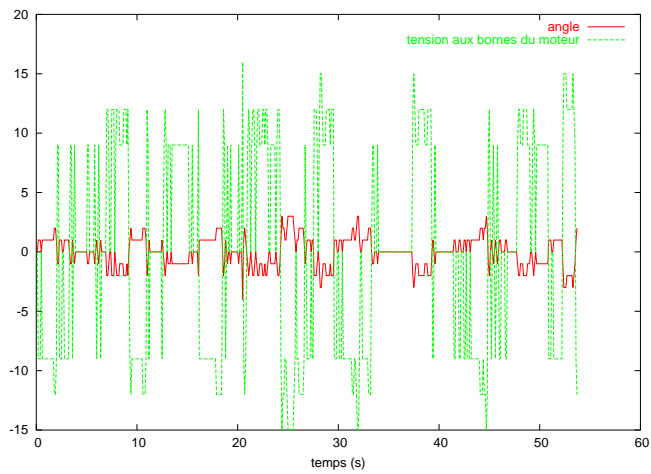


Voici le résultat d'un réglage acceptable :



Par moment, le pendule est en équilibre. Quand il quitte sa position d'équilibre, le chariot effectue quelques oscillations puis le ramène à son équilibre.

Quand on laisse évoluer le pendule, il fini par toucher les barre de protection et repart dans le sens contraire. Ceci peut durer longtemps. On obtient des courbes de ce genre :



Chapitre 5

Sources

5.1 Bibliographie

5.1.1 Électronique

- B. Kainka et H.J. Berndt, *Je programme les interfaces de mon PC sous windows*. Editions Publitronic/Elector

- Mark N. Horenstein, *Microelectronic circuits and devices*. Editions PRENTICE HALL

5.1.2 Programmation

- H. Schildt, *Référence complète JAVA 2*. Editions Fisrts interactive.

- M. Pelletier, *Delphi 5*. Editions Campus Press.

5.1.3 Physique et mathématique

- R. Simon, *Mécanique analytique*. Université de Liège, Editions Derouaux, 1988.

- J. Schmets, *Analyse mathématique*. Université de Liège, Editions Derouaux, Liège, 1996.

- André Garcet, *Exercices d'analyse mathématique, introduction au calcul intégral*. Université de Liège, Editions Derouaux, Liège, 1994.

- F. Grandjean, *Physique Générale, partie Mécanique, notes à l'usage des*

1ières candidatures Sciences Physiques et Sciences Chimiques. Université de Liège, 1995.

5.1.4 Pendule inversé

- Nenad Miskinja et Boris Tovornik, *Controlling of real inverted pendulum by fuzzy logic.* University of Maribor.

5.2 Sites Web

5.2.1 Mécanique générale

<http://www.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/meca/menumeca.html>

5.2.2 Le pendule double

<http://www.u-cergy.fr/etud/ufr/composan/physique/DEUG/TP/projetTP/LEROY/PenduleD.html>

<http://scienceworld.wolfram.com/physics/CoupledPendula.html>

http://www.myphysicslab.com/dbl_pendulum.html

5.2.3 robotique

<http://leiwww.epfl.ch/joe/>

Chapitre 6

Annexes

6.1 Annexe A : Amortissement exponentiel

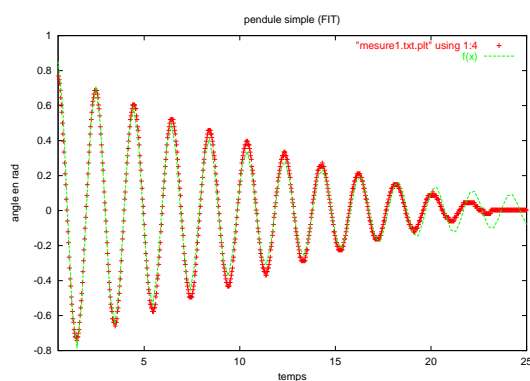
Dans l'étude du pendule simple, la loi du mouvement obtenue par fit est :

$$\theta(t) = a \cdot \frac{(b - t)}{b} \cdot \text{Cos}(ct - d). \quad (6.1)$$

Donc on a constaté que le facteur d'amortissement n'est pas une exponentielle négative mais une droite. En effet, si on fit le mouvement par :

$$\theta(t) = a \cdot \exp(-bt) \cdot \text{Cos}(ct - d) \quad (6.2)$$

Alors on obtient les résultats suivants :



Avec comme paramètres du fit :

	valeur	erreur (estimée par le logiciel de FIT)
a	0.89343	$\pm 0.007399(0.8281\%)$
b	0.0923832	$\pm 0.00112(1.212\%)$
c	3.18643	$\pm 0.001114(0.03496\%)$
d	10.979	$\pm 0.008249(0.07514\%)$

Nous constatons que dans ce cas, l'erreur sur le paramètre b est bien plus importante que si les frottements avaient une forme linéaire ¹. Du coup, nous avons préféré la forme linéaire.

Notre préférence peut aussi s'expliquer par les "paramètres statistiques du fit" :

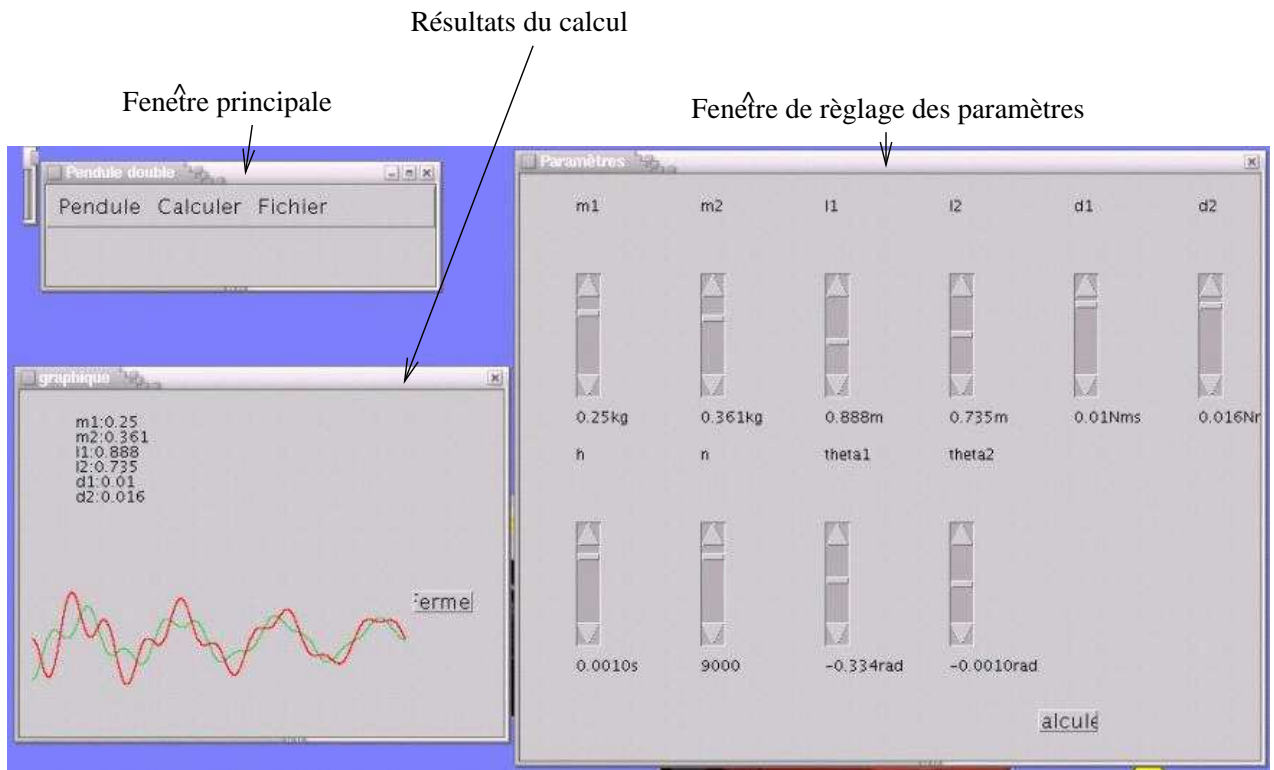
	fit linéaire	fit exponentiel
Somme des carrés des résidus	0.648041	1.58657
RMS des résidus	0.027759	0.0434342
Variance des résidus	0.00077056	0.00188653

En effet, nous observons que pour un fit linéaire, la somme des carrés des résidus est plus faible. Donc nous adopterons la forme linéaire au dépend de la forme exponentielle.

¹Voir section 2.4.2.

6.2 Annexe B : Programme de résolution des équations du pendule double

6.2.1 Capture d'écran



6.2.2 Code source